Universidade Nova de Lisboa
Faculdade de Economia

Integração e Cointegração Fraccional

António Rua

Este artigo apresenta um resumo dos principais resultados da teoria de integração e cointegração fraccional. Apesar do conceito de integração fraccional ter sido objecto de particular interesse em diferentes áreas do conhecimento, só muito recentemente este passou a merecer a atenção dos econometristas, devido à transposição desse conceito para o âmbito da cointegração. Neste artigo, procura-se exemplificar a aplicação dos diferentes conceitos e a selecção da literatura é feita com uma orientação econométrica visando a sua divulgação e posterior utilização em estudos empíricos futuros.

Este trabalho foi elaborado no âmbito da cadeira de Métodos de Previsão da Licenciatura em Economia da Faculdade de Economia da Universidade Nova de Lisboa. Agradeço a cooperação do Dr. Robalo Marques na realização deste trabalho. Quaisquer erros ou omissões são da exclusiva responsabilidade do autor.

1.- Introdução

A teoria acerca da integração fraccional foi introduzida por Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981) e é considerada na modelação do conceito de persistência (isto é, dependência entre observações distantes) nas séries temporais. A distinção entre variáveis estacionárias (I(0)) e variáveis integradas de ordem 1 (I(1)) é um tanto ou quanto arbitrária, na medida em que o conceito relevante é o da propriedade de reversão à média. De facto, o abandonar da hipótese da ordem de integração ser inteira permite captar a dinâmica de uma multiplicidade de processos com subtis reversões à média. O lento decaímento dos efeitos dos choques e o vagaroso mas eventual ajustamento para o equilíbrio é um dos atractivos deste tipo de processos. Ao permitir que a ordem de integração das séries assuma qualquer valor real é-se conduzido aos modelos de memória longa, que apresentam como ponto de interesse, entre outros, o facto de implicarem diferentes previsões de longo prazo e efeitos dos choques em relação às abordagens convencionais. Uma das características deste tipo de processos é facto de que, da observação do correlograma das séries originais, estas aparentam ser não estacionárias, enquanto que as séries diferenciadas aparentam estar sobrediferenciadas. A propriedade de memória longa pode ser considerada como uma característica intrínseca de alguns fenómenos económicos, mas mesmo que não o seja, Granger (1980) e Lin (1991) mostram que tal pode ocorrer a um nível macro devido à agregação dos dados. Tal persistência foi encontrada, por exemplo, no *output* (Diebold e Rudebusch (1989)), no consumo (Diebold e Rudebusch (1991a)), nas taxas de juro (Shea (1991)), na taxa de inflação (Hassler e Wolters (1995), Baillie *et al.* (1996) e Baum *et al.* (1999)) e na taxa de desemprego (Tschernig e Zimmermann (1992)).

A cointegração fraccional, que se baseia no conceito de diferenciação fraccional, foi proposta por Granger (1981, 1986). A análise de cointegração fraccional permite que a ordem de integração do termo corrector do erro assuma qualquer valor real, isto é, que seja fraccionalmente integrado (I(d)). De facto, um termo corrector do erro fraccionalmente integrado implica a existência de uma relação de equilíbrio de longo prazo, pois apresenta reversão à média ainda que não seja exactamente um processo I(0). Apesar da persistência significativa no curto prazo, o efeito de um choque num sistema, dissipa-se eventualmente, de tal forma que uma relação de equilíbrio entre as variáveis do sistema prevalece no longo prazo. Esta abordagem tem sido aplicada empiricamente por Cheung e Lai (1993), que ao examinarem a paridade do poder de compra, concluíram que o desvio da paridade possui memória longa e que pode ser descrito por um processo I(d), por Baillie e Bollerslev (1994) e Masih e Masih (1996) que obtiveram conclusões semelhantes nas taxas de câmbio, entre outros.

Este artigo está organizado da seguinte forma: na secção 2 introduz-se o conceito de integração fraccional e respectivos testes; na secção 3 apresenta-se o conceito de cointegração fraccional e respectivos testes; finalmente, a secção 4 destina-se à conclusão.

2.- Integração fraccional

2.1.- Conceito

O processo ARFIMA (*Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average*) que tem sido, recentemente, objecto de considerável atenção em Economia, é uma generalização do modelo ARIMA ao caso em que a ordem de diferenciação pode assumir um valor não inteiro.

A série $y = \{y_1, ..., y_T\}$ é definida por um processo ARFIMA(p,d,q) com média m se

$$\Phi(L)(1-L)^d (y_t - m) = \Theta(L)e_t, \qquad e_t \sim i.i.d.(0, s_e^2) \tag{1}$$

onde L é o operador *lag*, d é a ordem de diferenciação, $\Phi(L) = 1 - f_1 L - ... - f_p L^p$, $\Theta(L) = 1 + J_1 L + ... + J_q L^q$ e

$$(1-L)^d = \{1 - dL + d(d-1)L^2/2! - d(d-1)(d-2)L^3/3! + \ldots\} \tag{2}$$

onde o parâmetro d pode assumir qualquer valor real. Note-se que (2) se obtém por desenvolvimento em forma de Taylor de $(1-L)^d$ em torno de $L = 0$. O processo estocástico y é estacionário e invertível se todas as raízes de $\Phi(L)$ e de $\Theta(L)$ se encontrarem fora do círculo unitário e se $|d| < 0,5$. O processo é não estacionário se $|d| \geq 0,5$ possuíndo uma variância infinita. Assumindo que $0 < d < 0,5$ e que $d \neq 0$, Hosking (1981) mostrou que a função autocorrelação, $r(k)$, em que k é o número de desfasamentos, de um processo ARFIMA é proporcional a k^{2d-1} quando $k \to \infty$. Consequentemente, as autocorrelações de um processo ARFIMA, para $0 < d < 0,5$, decaiem hiperbolicamente para zero quando $k \to \infty$, ao contrário do que acontece num processo ARMA onde a dependência entre y_t e y_{t+k} decai exponencialmente quando $k \to \infty$. Para $0 < d < 0,5$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |r_k| = \infty$ e o processo ARFIMA diz-se que tem memória longa[1]. O processo diz-se que tem memória intermédia se -0,5 < d < 0 donde $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |r_k| < \infty$ e exibe memória curta quando d = 0 o que corresponde ao modelo ARMA estacionário e invertível. Para d < 1 o processo apresenta reversão à média e é estacionário em covariância quando -0,5 < d < 0,5 e é não estacionário em covariância para 0,5 < d < 1.

2.2.- Testes de integração fraccional

Os testes de raízes unitárias convencionais[2] não são, em geral, os mais indicados para testar a integração fraccional. Diebold e Rudebusch (1991b) e Hassler e Wolters (1994) mostraram, respectivamente, que o teste Dickey-Fuller e o teste Phillips-Perron são pouco potentes na distinção entre um processo I(1) sob a hipótese nula e um processo I(d) sob a hipótese alternativa. Apesar de Lee e Schimdt (1996) afirmarem que o teste KPSS pode ser utilizado para distinguir um processo I (0) dum processo I(d), surge a necessidade de utilizar outro tipo de testes.

2.2.1.- Teste GPH

Geweke e Porter-Hudak (1983) propuseram um estimador semi-paramétrico para o parâmetro d.[3] A função densidade espectral[4] de y_t é

$$f_y(w) = \{4\,\mathrm{sen}^2(w/2)\}^{-d}\, f_u(w) \tag{3}$$

onde $f_u(w)$ é a função densidade espectral de $u_t = (1-L)^d\, y_t$. Logaritmizando e avaliando nas frequências das harmónicas $w_j = 2p\, j / T$, onde T é a dimensão da amostra, obtém-se

---

[1] Existem múltiplas definições possíveis da propriedade de memória longa. A definição utilizada é a considerada por McLeod e Hipel (1978), isto é, um processo possui a característica de memória longa se o $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |r_k|$ é infinito.

[2] Para mais detalhes acerca dos testes de raízes unitárias consultar Marques (1998).

[3] Crato e Rothman (1994), Hassler e Wolters (1995), Diebold e Rudebusch (1989), por exemplo, aplicam-no a um conjunto de séries económicas. No caso particular de Portugal, Baum *et al.* (1999), utilizando dados mensais entre 1971 e 1995, concluíram que a taxa de inflação baseada no Índice de Preços no Consumidor era fraccionalmente integrada.

[4] Para mais detalhes acerca da análise no domínio frequência consultar Murteira *et al.* (1993).

$$\ln\{f_y(w_j)\} = \ln\{f_u(0)\} - d\ln\{4\,\mathrm{sen}^2(w_j/2)\} + \ln\left\{\frac{f_u(w_j)}{f_u(0)}\right\}. \qquad (4)$$

Para frequências w_j próximas de zero, o último termo é negligenciável relativamente aos outros termos. Adicionando $I_y(w_j)$, isto é, o periodograma avaliado em w_j, a ambos os lados da equação (4) resulta

$$\ln\{I_y(w_j)\} = \ln\{f_u(0)\} - d\ln\{4\,\mathrm{sen}^2(w_j/2)\} + \ln\left\{\frac{I_y(w_j)}{f_y(w_j)}\right\}. \qquad (5)$$

Geweke e Porter-Hudak sugerem a seguinte regressão

$$\ln\{I_y(w_j)\} = a + b\ln\{4\,\mathrm{sen}^2(w_j/2)\} + v_j, \qquad j=1, 2,..., k \qquad (6)$$

em que $b = -d$ e v_j é i.i.d. com média nula e variância assimptótica $\pi^2/6$. Se o número de frequências k for escolhido de forma a que $k = g(T)$, onde $g(T)$ é tal que $\lim_{T\to\infty} g(T) = \infty$, $\lim_{T\to g}\{g(T)/T\} = 0$, $\lim_{T\to g}\{\ln(T)^2/g(T)\} = 0$ então o estimador obtido pelo método dos mínimos quadrados ordinários de d é consistente[5] e a distribuição de $(\hat{d}-d)/SE(\hat{d})$ é assimptoticamente Normal. Uma das vantagens deste método, é permitir estimar d sem conhecer as ordens p e q do processo ARFIMA (p,d,q). As propriedades teóricas do estimador de Geweke e Porter-Hudak (GPH) têm sido investigadas apenas em processos com $-0{,}5 < d < 0{,}5$, isto é, processos estacionários e invertíveis. Robinson (1991) sugere que para uma série com um d fora daquele intervalo, esta seja diferenciada um número inteiro de vezes até que seja obtido um d dentro do intervalo referido. Contudo, na prática, o método de estimação GPH é frequentemente aplicado a séries não estacionárias ou não invertíveis antes de proceder à sua diferenciação. Daí que fosse desejável ter um estimador de d que não estivesse sujeito à restrição $-0{,}5 < d < 0{,}5$, como acontece com o estimador GPH. Hurvich e Ray (1995), mostraram que o estimador GPH pode ser fortemente enviesado em processos não estacionários ou não invertíveis e que o mesmo não é, em geral, invariante à primeira diferença, isto é, a estimativa de d obtida a partir da série original não é, em geral, igual à

[5] Geweke e Porter-Hudak (1983) demonstram a consistência e a normalidade assimptótica para $d < 0$, enquanto que Robinson (1990) demonstra a consistência para $0 < d < 0{,}5$.

soma da unidade com a estimativa de d obtida a partir da série diferenciada[6]. Um importante problema prático na implementação do estimador GPH tem sido a escolha de k. Geweke e Porter-Hudak (1983) sugeriram $k = T^{1/2}$, contudo, na prática, tal estratégia aparenta não ser a mais indicada. Se por um lado, reduzir k permite reduzir de certa forma o enviesamento, por outro, tal só se torna possível à custa de um aumento da variância. Hurvich *et al.* (1998) sugerem $k = o(T^{4/5})$, que demonstram ser o k óptimo que resulta da minimização do erro quadrático médio e cuja performance é superior a $k = T^{1/2}$ mesmo em amostras relativamente pequenas. Apesar do estimador GPH ser simples de aplicar, razão pela qual é o mais utilizado, e ser potencialmente robusto à não normalidade, o seu comportamento na presença de substancial autocorrelação em u_t reduz a sua atractividade[7].

2.2.2.- Teste REG

Depois de ajustado um modelo ARMA a uma série devidamente estacionarizada, pode-se testar a possibilidade de d ser fraccional como um teste de avaliação à qualidade do modelo obtido. Foi neste sentido, que Agiakloglou e Newbold (1994) propuseram um teste LM *(Lagrange multiplier)*, denominado REG, baseado na regressão auxiliar

$$\hat{e}_t = \sum_{i=1}^{p} b_i W_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} g_j Z_{t-j} + dK_m + u_t \tag{7}$$

onde

$$K_m = \sum_{j=1}^{m} j^{-1}\hat{e}_{t-j}\,,\ \hat{\Theta}(L)W_t = y_t\,,\ \hat{\Theta}(L)Z_t = \hat{e}_t$$

e u_t é i.i.d. com distribuição Normal, $\hat{e}_t$ e $\hat{\Theta}(L)$ são respectivamente o resíduo estimado e o polinómio MA estimado do modelo ARFIMA sob a hipótese nula (d = 0).

As ordens p e q das componentes AR e MA são seleccionadas através do critério de informação de Schwartz (1978) e Agiakloglou e Newbold (1994) sugerem que o m deve assumir um valor pequeno. A equação (7) deve ser estimada pelo método dos mínimos

---

[6] Por exemplo, Agiaklogou *et al.* (1993) obtiveram $\hat{d} = -0{,}26$ para a primeira diferença da série relativa ao desemprego nos EUA, enquanto que para série não diferenciada obtiveram $\hat{d} = 0{,}99$.

[7] Em particular, Agiakloglou *et al.* (1993) mostram que possui um sério enviesamento e é muito ineficiente quando u_t é AR(1) ou MA(1) e o parâmetro AR ou MA é muito elevado.

quadrados ordinários para o período $t = m+1,..., T$. O habitual teste t da hipótese $d = 0$ conjuntamente com os valores críticos assimptóticos da distribuição Normal *standard* constituem o teste REG.

2.2.3.- Teste AUTO

Uma vez que se perdem m observações na estimação do modelo (7), Agiakloglou e Newbold (1994) sugeriram no mesmo artigo, um teste alternativo designado por teste AUTO. Assuma-se que uma série foi suficientemente diferenciada por forma a ter a aparência de estacionária, à qual foi ajustado um modelo ARMA*(p,q)*. Sob a hipótese nula de que a especificação ARMA*(p,q)* é correcta, $\hat{r}' = (\hat{r}_1, \hat{r}_2, ..., \hat{r}_m)$ em que $\hat{r}_j$ é a autocorrelação dos resíduos de ordem j, é assimptoticamente Normal com média nula e matriz variâncias-covariâncias $C = T^{-1} V$ onde os elementos da matriz V são função, apenas, dos parâmetros das componentes AR e MA[8]. Contudo, Davis *et al.* (1977), Ljung e Box (1978) e Ansley e Newbold (1979) sugerem a seguinte expressão para a matriz variâncias-covariâncias $W = T^{-1}(T+2)^{-1}LVL$ onde L é uma matriz diagonal m x m em que o i-ésimo elemento da diagonal é $(T - i)^{1/2}$. Se $S_m = \sum_{j=1}^{m} j^{-1}\hat{r}_j$ então, sob a hipótese nula, $var(S_m)=h'W\,h$ onde o vector h com m elementos tem como j-ésimo elemento j^{-1}. O teste é baseado em

$$Z = (h'\hat{W}h)^{-1/2} S_m \tag{8}$$

que possui uma distribuição assimptótica Normal *standard* sob a hipótese nula e onde os parâmetros das componentes AR e MA são substituídos pelas suas estimativas no cálculo de $\hat{W}$.

Agiakloglou e Newbold (1994) procederam à comparação dos testes AUTO e REG e concluíram que era no teste REG que se verificava uma maior proximidade entre o nível de significância real e o nível de significância nominal. Além disso, mostraram que a escolha de m tem pouco impacto na potência de ambos os testes e que, enquanto que o teste REG é melhor na detecção de processos com d negativo, o teste AUTO é mais potente quando d é positivo.

[8] Expressões explícitas desses elementos podem ser encontradas, por exemplo, em McLeod (1978).

2.2.4.- *Teste MRR*

O teste R/S foi proposto por Hurst (1951) e foi refinado por Mandelbrot (1972) e por McLeod e Hipel (1978). Lo (1991) propôs uma versão dessa estatística robusta quer à presença da componente de memória curta na série, quer à heteroescedasticidade. O teste MRR *(Modified Rescaled Range)*[9] é definido por

$$Q_T = \frac{R_T}{\hat{s}_T(k)} \tag{9}$$

onde

$$R_T = \max_{0<i\leq T} \sum_{t=1}^{i} (y_t - \bar{y}) - \min_{0<i\leq T} \sum_{t=1}^{i} (y_t - \bar{y}) \tag{10}$$

$$\hat{s}_T^2(k) = \hat{s}^2 + 2\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=j+1}^{T} \left(1 - \frac{j}{k+1}\right)(y_i - \bar{y})(y_{i-j} - \bar{y}) \tag{11}$$

em que $\bar{y}$ é a média amostral e $\hat{s}^2$ é a estimativa da máxima verosimilhança da variância. De acordo com Andrews (1991), k deve ser fixado como a parte inteira de $(3T/2)^{1/3}\{2\hat{r}/(1-\hat{r}^2)\}^{2/3}$ em que $\hat{r}$ é o coeficiente de autocorrelação de primeira ordem. Lo (1991) fornece os valores críticos assimptóticos para o teste MRR. Cheung (1993) mostra que o teste MRR é conservador em processos com componente autoregressiva, isto é, o nível de significância real é inferior ao nível de significância nominal e que tem dificuldades em detectar a integração fraccional positiva, especialmente em amostras de dimensão moderada.

2.2.5.- *Método de Sowell*

Ao contrário dos procedimentos anteriores, o estimador da máxima verosimilhança proposto por Sowell (1992a) permite obter simultaneamente estimativas de todos os parâmetros do modelo.[10] Seja Y_T um vector T x 1 de observações gerado pelo modelo (1)

[9] Uma aplicação prática pode ser encontrada, por exemplo, em Lo (1991), Crato e Rothman (1994) ou em Cheung e Lai (1995).

[10] Uma aplicação prática pode ser encontrada, por exemplo, em Sowell (1992b) ou em Barkoulas *et al.* (1998).

cujos resíduos têm uma distribuição Normal. Nesse caso, o logaritmo da função de verosimilhança é dado por

$$L(g\,;Y_T) = -\frac{T}{2}\log(2p) - \frac{1}{2}\log\left|\Sigma_T\right| - \frac{1}{2}\left(Y_T'\Sigma_T^{-1}Y_T\right). \qquad (12)$$

O estimador da máxima verosimilhança é obtido maximizando (12) em ordem ao vector $g = (\Phi, \Theta, d)$ e é consistente e assimptoticamente Normal. Apesar do estimador proposto por Sowell ser teoricamente atractivo, em cada iteração da maximização do logaritmo da função de verosimilhança é necessária a inversão de uma matriz T x T, Σ_T, daí que Sowell tenha utilizado a estrutura Toeplitz de Σ_T para reduzir o seu custo de cálculo. Além disso, este método exige que as raízes do polinómio autoregressivo sejam distintas. No entanto, Sowell (1992a) argumenta que essa hipótese, na prática, não é uma limitação pois a probabilidade de existirem raízes repetidas num polinómio é muito pequena.

Sowell sugere que através da estimação de um modelo ARFIMA para uma série em primeiras diferenças, é possível distinguir um modelo com *trend* determinístico de um passeio aleatório com *drift*. Se a estimativa de d estiver próxima de –1 então os dados suportam um modelo com *trend* determinístico, se a estimativa de d estiver próxima de 0 então os dados suportam um processo integrado de ordem 1 com *drift*.[11]

2.3.- Testes de integração fraccional sazonal

Apesar da importância dos processos sazonais fraccionalmente integrados já ter sido reconhecida há algum tempo atrás por Porter-Hudak (1990)[12], a investigação nesta área tem sido bastante escassa. O modelo ARFIMA sazonal ou ARFISMA (*Autoregressive Fractionally Integrated Seasonal Moving Average*) é dado por

$$\Phi(L)(1-L^s)^d\, y_t = \Theta(L)e_t, \qquad e_t \sim i.i.d.(0, s_e^2) \qquad (13)$$

onde L é o operador *lag*, d é a ordem de diferenciação, $\Phi(L) = 1 - f_1 L - \ldots - f_p L^p$, $\Theta(L) = 1 + J_1 L + \ldots + J_q L^q$ e s é o número de períodos intra-anuais. O processo ARFISMA tem um comportamento nas frequências sazonais idêntico ao evidenciado por um processo ARFIMA na frequência zero. Considere-se s = 4 (dados trimestrais), então o modelo

[11] Uma aplicação prática pode ser encontrada em Sowell (1992b).

[12] Porter-Hudak (1990) examina os agregados monetários M1, M2 e M3 utilizando dados mensais.

ARFISMA reduz-se simplesmente a $\Phi(L)(1-L^4)^d y_t = \Theta(L)e_t$. Contudo, Hassler (1994) argumenta que o filtro $(1-L^4)^d$ é um filtro rígido, na medida em que as contribuições das oscilações semestrais e anuais e do comportamento de longo prazo para a variância do respectivo processo são todas governadas por um d comum, daí que tenha proposto a utilização de um filtro flexível, $(1-L)^{d_0}(1+L)^{d_1}(1+L^2)^{d_2}$, para a modelação separada da importância das frequências sazonais[13]. Assim, o modelo ARFISMA vem dado por

$$\Phi(L)(1-L)^{d_0}(1+L)^{d_1}(1+L^2)^{d_2} y_t = \Theta(L)e_t \tag{14}$$

em que d_0, d_1 e d_2 são as ordens de integração fraccional nas frequências 0, *p/2* e *p* respectivamente. O processo estocástico y é estacionário e invertível se todas as raízes de $\Phi(L)$ e de $\Theta(L)$ se encontrarem fora do círculo unitário e se -0,5 < d_i < 0,5 para $\forall i$. Além disso, o processo ARFISMA é um processo de memória longa quando 0 < d_i < 0,5 para $\forall i$.

2.3.1.- Teste GPH generalizado

Hassler (1994) generaliza o teste GPH para testar o parâmetro fraccional na frequência zero e nas frequências sazonais, da mesma forma que Hylleberg *et al.* (1990) extendem o teste Dickey-Fuller para testar a existência de raízes unitárias na frequência zero e/ou nas frequências sazonais. Considerem-se as seguintes regressões:

$$\ln\{I_y(w_{i,j})\} = a_i - d_i \ln\{4\,\mathrm{sen}^2(w_j/2)\} + v_{i,j}, \quad i=0, 1, 2 \text{ e } j=1, 2, \ldots, k \tag{15}$$

onde $I_y(w_{i,j})$ é o periodograma de y_t na frequência $w_{i,j}$, d_i são os parâmetros de integração fraccional nas frequências 0, *p/2* e *p* respectivamente, pertencentes às frequências das hamónicas $w_{i,j}$: $w_{0,j} = 2pj/T$, $w_{1,j} = p/2 + 2pj/T$, $w_{2,j} = p - 2pj/T$, k é o número de frequências e T é a dimensão da amostra.

Para testar H_0: $d_i = 0$ contra H_1: $d_i \neq 0$, $i = 0, 1, 2$ em (15) a estatística de teste é definida por

[13] Este tipo de modelos é uma generalização dos modelos de integração sazonal introduzidos por Hylleberg *et al.* (1990).

$$\frac{\hat{d}_i}{\sqrt{\hat{s}^2(\hat{d}_i)}} \tag{16}$$

onde $\hat{d}_i$ é o estimador do método dos mínimos quadrados ordinários de d_i e $\hat{s}^2(\hat{d}_i)$ é a variância estimada de $\hat{d}_i$, definida por $\frac{p^2}{6S_R^2}$ para as frequências 0 e p e $\frac{p^2}{12S_R^2}$ para a frequência *p/2*, em que $S_R^2 = \sum_{j=1}^{k}\left(R_j - \overline{R}\right)^2$ e $R_j = -\ln\left\{4\,\mathrm{sen}^2(w_j/2)\right\}$. A distribuição assimptótica da estatística de teste é uma distribuição Normal *standard*.

2.3.2.- Teste TDS

O teste TDS *(Time Domain Score)* foi derivado por Silvapulle (1996) para testar a existência de integração fraccional na frequência zero e nas frequências sazonais em séries trimestrais[14]. Considere-se o modelo (14) em que y_t é uma série observável ou o erro inobservável da regressão $x_t = b'z_t + y_t$, $t = 1, 2, ..., T$ onde z_t é um vector k x 1 de variáveis estocásticas ou não estocásticas e b é um vector k x 1 de parâmetros desconhecidos. Seja $g = (d,h)$ com $d = (d_0, d_1, d_2)$ e $h = (F, Q, b, s^2)$ e $0 = (0,0,0)$. Para testar H_0: $d = 0$ contra H_1: $d \neq 0$, a estatística de teste é definida por

$$T_0 = n^{-1} s_d' i_{dd}^{-1} s_d \tag{17}$$

em que $n = (T-2m)$, T é o número de observações, s_d é o declive do logaritmo da função de verosimilhança $L(g)$ para T observações, isto é,

$$s_d = \left(\frac{\partial L(g)}{\partial d_0}, \frac{\partial L(g)}{\partial d_1}, \frac{\partial L(g)}{\partial d_2}\right) \tag{18}$$

com

$$\frac{\partial L(g)}{\partial d_0} = \left(1/\hat{s}^2\right)\sum_{t=1}^{T}\hat{e}_t \sum_{j=1}^{m} j^{-1}\hat{e}_{t-j}\ , \tag{19}$$

[14] Silvapulle (1996) aplica o teste TDS às séries do rendimento disponível e do consumo australiano.

$$\frac{\partial L(g)}{\partial d_1} = -\left(1/\hat{s}^2\right)\sum_{t=1}^{T}\hat{e}_t\sum_{j=1}^{m} j^{-1}(-1)^{j-1}\hat{e}_{t-j}\ , \tag{20}$$

$$\frac{\partial L(g)}{\partial d_2} = -\left(1/\hat{s}^2\right)\sum_{t=1}^{T}\hat{e}_t\sum_{j=1}^{m} j^{-1}(-1)^{j-1}\hat{e}_{t-2j}\ , \tag{21}$$

em que $\hat{e}_t$ são os resíduos obtidos da estimação do modelo (14), sob a hipótese nula, pelo método dos mínimos quadrados ordinários e m é escolhido de forma a que $ln(1+L)$ possa ser aproximado pelos primeiros m termos da sua expansão. Além disso, i_{dd} é a matriz de informação de s_d sob H_0 em que a parte triangular inferior de i_{dd} é dada por

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m} j^{-2} & & \\ \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1} j^{-2} & \sum_{j=1}^{m} j^{-2} & \\ \sum_{j=1}^{[m/2]}(-1)^{j-1}(2j^2)^{-1} & \sum_{j=1}^{[m/2]}(-1)^{j}(2j^2)^{-1} & \sum_{j=1}^{m} j^{-2} \end{bmatrix}$$

onde [*m/2*] é o maior inteiro de *m/2*. A estatística T_0 tem como distribuição assimptótica uma distribuição χ^2 com 3 graus de liberdade. Silvapulle (1996) mostra que T_0 tem propriedades desejáveis, quer em termos do nível de significância quer em temos de potência, e que a sua potência aumenta à medida que d_i, i = 0, 1, 2, e/ou T aumentam.

No caso particular de se pretender testar H_0: $d_1 = 0$ contra H_1: $d_1 \neq 0$, isto é, testar a existência de integração fraccional apenas na frequência zero com $d_1 = d_2 = 0$, então a estatística T_0 vem dada por

$$T_0' = \left(\frac{\partial L(g)}{\partial d_0}\right)^2 \Bigg/ \left[\left(\sum_{j=1}^{m} j^{-2}\right)(T-m)\right] \tag{22}$$

que permite de uma forma simples testar a existência de integração fraccional.

3.- Cointegração fraccional

3.1.- Conceito

Seja x_t um vector de p variáveis. Diz-se que o vector x_t é cointegrado de ordem d, b, e escreve-se $x_t \sim$ CI (d, b), se cada elemento de x_t for I(d) e existir um vector b, tal que $z_t = b`x_t$ é I$(d\text{-}b)$ com $b \neq 0$ e $d \geq b > 0$. De facto, se a combinação linear de variáveis integradas for fraccionalmente integrada (d-b não inteiro), estamos na presença de cointegração fraccional. O desenvolvimento de um modelo fraccionalmente cointegrado tem pelo menos duas justificações: generalizar um modelo desnecessariamente restrictivo (não é necessário que $b`x_t$ seja I(0)) e obter melhores estimativas dos parâmetros de interesse.

3.2.- Teorema de representação de Granger

Engle e Granger (1987), através do Teorema de representação de Granger, demonstraram que existe uma relação estreita entre o conceito de cointegração e os modelos ECM *(Error Correction Model)*. Granger (1986) mostra que se o vector x_t é fraccionalmente cointegrado, então existe um modelo FIECM *(Fractionally Integrated Error Correction Model)* dado por

$$H(L)(1-L)^d x_t = -g\left[1-(1-L)^b\right] \; (1-L)^{d-b} z_t + C(L)e_t \qquad (23)$$

onde $z_t = b`x_t$, *H(L)* é uma matriz polinomial no operador *lag L*, *H(0)* é a matriz identidade, C(L) é um polinómio em L finito e e_t é um ruído branco. Uma vez que o modelo ECM é um caso particular do modelo FIECM, então no caso de existir cointegração fraccional, é cometido um erro de especificação devido à omissão de variáveis (z_{t-j} para $j > 1$), caso o modelo adoptado seja um modelo ECM. Visto que o modelo FIECM tem em consideração a propriedade de memória longa na relação de cointegração, é de esperar que possibilite uma melhor previsão (em especial, no longo prazo) se realmente existir cointegração fraccional.

3.3.- *Testes de cointegração fraccional e estimação de modelos multivariados*

3.3.1.- *Método de Engle e Granger*

Cheung e Lai (1993) estudaram como testar a cointegração fraccional entre duas séries, y_t e x_t, ambas I(d) e fraccionalmente cointegradas, isto é, CI(d,b). Seja $e_t = y_t - bx_t$ em que e_t é I$(d-b)$ com $(d-b) > 0$. No caso de $(d-b) > 1/2$, Cheung e Lai (1993) mostraram que o estimador do método dos mínimos quadrados ordinários de b converge em probabilidade para zero para todo $d > 0$, tal que

$$T^{b-d}\left(\hat{b} - b\right) = \left[\left(\sum x_t e_t\right) / T^{2d-b+d}\right] \left[T^{-2d} \sum x_t^2\right]^{-1} \qquad (24)$$

e quando $1/2 > (d-b) \geq 0$ então $\left(\sum x_t e_t\right) / T^{2d-b}$ converge em distribuição para uma função de movimentos Brownianos. Resumindo, Cheung e Lai (1993), sob a hipótese de cointegração de ordem (d, b) com $b > 0$, concluíram que $\hat{b}$ é consistente e converge em probabilidade para b à taxa o$(T^{\,b})$.[15] Isto conduziu a que o procedimento de teste fosse baseado nos resíduos, obtidos pelo método dos mínimos quadrados ordinários, da regressão cointegrante por forma a averiguar se são I(d) com $d < 1$ ou não. Assim, testar a cointegração fraccional requer testar a integração fraccional no termo corrector do erro. No âmbito da cointegração fraccional, o teste porventura mais utilizado tem sido o teste GPH. De facto, a aplicação deste tipo de metodologia pode conduzir a conclusões diferentes das obtidas com a metodologia tradicional. Por exemplo, Baillie e Bollerslev (1994) concluíram existir cointegração fraccional num sistema de sete taxas de câmbio diárias, ao contrário do que foi concluído por Diebold *et al* (1994) utilizando a metodologia de cointegração *standard*. Também Barkoulas *et al* (1997) ao analisar um sistema de taxas de juro de longo prazo de cinco países industrializados, concluíram existir cointegração, ao contrário de DeGennaro *et al* (1994), exibindo uma dinâmica subtil de reversão à média.

Contudo a aplicação do teste GPH não está isenta de dificuldades. Na realidade, os valores críticos do teste GPH derivados da distribuição Normal *standard* não podem ser utilizados para testar a cointegração fraccional. Tal deve-se ao facto, de que os resíduos da regressão de cointegração não sendo observados mas sim estimados tendem a ser enviesados

[15] No caso de cointegração de ordem (1, 1), Stock (1987) mostrou que o estimador do método dos mínimos quadrados ordinários era consistente e que convergia à taxa o(T) em vez da taxa usual o$(T^{1/2})$. Este resultado de Stock (1987) é um caso particular do obtido por Cheung e Lai (1993) em que $b = 1$.

para a estacionaridade, levando a que a hipótese nula de inexistência de cointegração no teste GPH seja mais vezes rejeitada do que o sugerido pelo nível de significância nominal do teste GPH. Este problema, já tinha sido observado, ainda que num contexto mais geral, por Engle e Granger (1987). Daí que, tenha sido prática generalizada a estimação dos valores críticos através de simulações Monte Carlo[16]. Relativamente à escolha de k, Geweke e Porter-Hudak (1983) sugeriram $k = T^{0,5}$ enquanto que Andersson e Lyhagen (1997) mostram que $k = T^{0,9}$ é o valor que maximiza a potência do teste quando se procede ao teste de cointegração fraccional.

A estimação eficiente do modelo (23), segundo Cheung e Lai (1993), não aparenta ser simples. Apesar deste alerta, é possível encontrar em alguns estudos empíricos, como por exemplo em Lien e Tse (1999a, 1999b), a estimação do modelo FIECM através do método dos dois passos de Engle e Granger. Numa primeira fase, são obtidos d e b e os resíduos da regressão cointegrante e numa segunda fase, a estimação do modelo (23) é feita tomando-os como dados, utilizando o estimador CSS *(Conditional Sum of Squares)*.[17] Contudo, enquanto que Engle e Granger (1987) justificaram o procedimento para o modelo ECM, os efeitos de se tomar como conhecida a ordem de integração fraccional do termo corrector do erro na segunda fase na distribuição limite do estimador são desconhecidos.

3.3.2.- Método de Lyhagen

A estimação de um modelo fraccionalmente cointegrado através do método de Johansen (1988) foi analisada por Andersson e Gredenhoff (1999). Eles concluíram que as consequências de ignorar a cointegração fraccional podem ser severas (enviesamento) para as estimativas da matriz $P = ab'$, o que levou Lyhagen (1998) a sugerir outro método de estimação baseado no método da máxima verosimilhança.

Seja o modelo

$$H(L)\tilde{D}(L)x_t = aD(L)b'x_t + e_t \qquad (25)$$

---

[16] Por exemplo, Cheung e Lai (1993), Masih e Masih (1995) e Booth e Tse (1995). Contudo, Tse *et al.* (1999) fornecem os valores críticos para o teste GPH para amostras de dimensão T = 128, 512, 1024 e 4096.

[17] A estimação através do método CSS, no contexto dos modelos ARFIMA, foi originalmente proposta por Hosking (1984) e as propriedades desse estimador foram estudadas por Chung e Baillie (1993).

com

$$\widetilde{D}(L) = \begin{bmatrix} (1-L)^{d_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1-L)^{d_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (1-L)^{d_p} \end{bmatrix}$$

e

$$D(L) = \begin{bmatrix} (1-L)^{1-b_1} - (1-L) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1-L)^{1-b_2} - (1-L) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (1-L)^{1-b_p} - (1-L) \end{bmatrix}$$

Assuma-se que $d_1 = d_2 = ... = d_p = 1$, a e b são matrizes de dimensão p x r, $b_i > 0$ e defina-se r_i como sendo o número de vectores cointegrantes com o mesmo b_i e r^* o número de valores diferentes assumidos por b.

Considere-se o seguinte modelo

$$(1-L)x_t = aD(L)b'x_t + e_t \,. \tag{26}$$

Quando apenas existe um vector cointegrante ou todos os vectores cointegrantes partilham o mesmo b, então D e b comutam e é possível estimar o modelo fraccionalmente cointegrado pelo método sugerido por Johansen (1988), isto é, estimar

$$(1-L)x_t = ab'x_t^b + e_t \tag{27}$$

com $x_t^b = \left[(1-L)^{1-b} - (1-L)\right]x_t$. No caso mais geral, com mais do que um vector cointegrante e não o mesmo b para todos os vectores cointegrantes, a equação (26) pode ser reescrita,

$$(1-L)x_t = aD(L)\begin{bmatrix} b_1'x_t \\ b_2'x_t \\ \vdots \\ b_r'x_t \end{bmatrix} + e_t = a\begin{bmatrix} b_1'x_t^{b_1} \\ b_2'x_t^{b_2} \\ \vdots \\ b_r'x_t^{b_r} \end{bmatrix} + e_t = a\tilde{b}'\tilde{x}_t + e_t \qquad (28)$$

com $\tilde{x}_t' = (x_t^{b_1}, x_t^{b_2}, ..., x_t^{b_{r*}})'$ e

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{r*} \end{bmatrix}.$$

Esta matriz pode ser escrita em termos das restrições individuais sobre os vectores cointegrantes

$$\tilde{b} = (H_1 b_1, H_2 b_2, ..., H_{r*} b_{r*}), \qquad (29)$$

onde a matriz H_i é uma matriz identidade no bloco i e zeros no resto da matriz. A estimação de modelos com este tipo de restrições, estudada por Johansen (1995), baseia-se no seguinte procedimento: em primeiro lugar, obtêm-se estimativas iniciais de $b_2,...,b_{r*}$ e estima-se b_1 através da função de verosimilhança concentrada condicionada num valor de partida para b. Isto é, minimizar

$$\frac{\left|S_{00|b_2,...,b_{r*}}\right|\left|b_1'(S_{11|b_2,...,b_{r*}} - S_{10|b_2,...,b_{r*}} S_{00|b_2,...,b_{r*}}^{-1} S_{01|b_2,...,b_{r*}}) b_1\right|}{\left|b_1'(S_{11|b_2,...,b_{r*}}) b_1\right|},$$

onde $S_{00|b_2,...,b_{r*}}$ é a matriz de produtos concentrada baseada em $(1-L)x_t$ e $S_{11|b_2,...,b_{r*}}$ é baseada em $x_t^{b_1}$. Em seguida, concentrar em ordem a $b_1'x_t^{b_1}, b_3'x_t^{b_3}, ..., b_{r*}'x_t^{b_{r*}}$ e estimar b_2. Este processo continua até que b_{r*} seja estimado através da função de verosimilhança concentrada e o valor da função de verosimilhança é calculado pela fórmula *standard*. Estes passos são repetidos até que o aumento na função de verosimilhança seja suficientemente pequeno. Isto permite obter o valor da função de verosimilhança para um dado b. Em seguida, minimizar numericamente em *b* para obter o valor de *b* que maximiza a função de verosimilhança.

Johansen (1995) propôs que os valores iniciais fossem escolhidos estimando *b* irrestrito e depois resolvendo

$$\left| l\hat{b}'\hat{b} - \hat{b}'H_i(H_i'H_i)^{-1}H_i'\hat{b} \right| = 0 \tag{30}$$

para os valores próprios e para os vectores próprios, *v*, logo, o valor de partida é dado por $b_i = \hat{b}(v_1,...,v_{r_i})$.

Testar a existência de cointegração fraccional é mais complexo do que no caso em que as variáveis não estão cointegradas fraccionalmente. O valor máximo da função de verosimilhança é proporcional ao determinante da matriz de variâncias-covariâncias dos resíduos, *Se*, que pode ser escrito da seguinte forma

$$\left|\sum e\right| = \left|S_{00|b_2,...,b_{r^*}}\right| \prod_{i=1}^{r_1}(1 - l_i^1) \tag{31}$$

$$= \left|S_{00|b_1,b_3,...,b_{r^*}}\right| \prod_{i=1}^{r_2}(1 - l_i^2) \tag{32}$$

$$\vdots$$

$$= \left|S_{00|b_1,...,b_{r^*-1}}\right| \prod_{i=1}^{r_{r^*}}(1 - l_i^{r^*}) \tag{33}$$

onde $l_i^{\,j}$ é a i-ésima raíz da solução do problema de valores próprios em que b_j é utilizado para filtrar as séries. Um dos problemas que surge, é o facto de existirem r^* testes possíveis para testar a existência de *r-1* contra *r* vectores cointegrantes. O teste do rácio de verosimilhanças é o teste do máximo valor próprio. A solução proposta para a escolha de qual dos r^* possíveis testes se deve utilizar, consiste em usar o teste que se encontra mais distante da hipótese nula, isto é, escolher o teste que possui o *p-value* mais pequeno.Visto que, quer a estatística do máximo valor próprio quer a estatística do traço têm distribuições assimptóticas não *standard*, Lyhagen (1998) fornece os valores críticos assimptóticos para ambos os testes para diferentes valores de *b*. Lyhagen (1998) mostra que a potência dos testes aumenta com *b* e com a dimensão da amostra e que o teste do máximo valor próprio se revela mais potente do que o teste do traço, ainda que a diferença seja pequena.

Lyhagen (1998), através de uma investigação Monte Carlo, concluíu que a perda de eficiência por se assumir um modelo fraccionalmente cointegrado em vez do modelo *standard* quando o *standard* é o verdadeiro modelo é pequena enquanto que as consequências de ignorar a cointegração fraccional podem ser severas, isto é, é muito mais prejudicial ignorar a cointegração fraccional do que incorporá-la quando não está presente.

3.3.3.- Método de Dueker e Startz

Os testes de cointegração abordados até ao momento, baseiam-se no pressusposto de que a ordem de integração das séries originais é conhecida. Assim, Dueker e Startz (1998), pondo em causa a validade dessa hipótese, sugeriram a estimação de um modelo ARFIMA multivariado com o intuito de obter um teste de cointegração baseado nas estimativas conjuntas das ordens de integração fraccional do resíduo cointegrante ($d' = d - b$) e das séries originais (d). De facto, esta metodologia ao permitir ter em consideração a incerteza associada à ordem de integração das séries originais na realização do teste de cointegração, torna mais difícil a rejeição da hipótese nula de ausência de cointegração. Convém referir que este método também se revela útil na análise de cointegração *standard*, na medida em que, por vezes surge hesitação em concluir pela existência de cointegração em virtude da incerteza relativa à ordem de integração das séries originais, isto é, se realmente possuem ou não raízes unitárias.

Sem perda de generalidade, considere-se o modelo ARFIMA bivariado com cointegração

$$\Phi(L)\begin{bmatrix}(1-L)^d & 0 \\ 0 & (1-L)^{d-b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ -b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1 \\ y_2\end{bmatrix} = \Theta(L)e\,. \qquad (34)$$

Sowell (1989) analisa a estimação do modelo ARFIMA multivariado através do método da máxima verosimilhança. A estimação pelo método da máxima verosimilhança consiste em maximizar o logaritmo da função de verosimilhança multivariada, isto é, resume-se a maximizar

$$-\frac{1}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}y'\Sigma^{-1}y \qquad (34)$$

em que y é um processo com média nula e a dimensão da matriz variâncias-covariâncias é $2T$ x $2T$. Para estimar os parâmetros do modelo por máxima verosimilhança, é necessário avaliar a função de verosimilhança para um dado conjunto de valores dos parâmetros. Tal requer, escrever a matriz de variâncias-covariâncias ou, equivalentemente, a função de autocovariância em termos dos parâmetros do modelo. Esta parametrização da função de autocovariância é obtida escrevendo a função densidade espectral de y em termos dos parâmetros do modelo e depois calculando a função de autocovariância através de

$$E[y_t y'_{t-s}] = \Sigma(s) = \Sigma(-s)' = \frac{1}{2p}\int_0^{2p} f_y(l) e^{ils} dl \tag{36}$$

em que f_y é a função densidade espectral de y e que pode ser escrita da seguinte forma

$$f_y(l) = D(w)^{-1}\left[\Phi(w)^{-1}\Theta(w)\right]\Sigma(0)\left[\Theta(w^{-1})\Phi(w^{-1})^{-1}\right]D\left(w^{-1}\right)^{-1} \tag{37}$$

com $w = e^{-il}$,

$$\Sigma(0) = E[y_t y_t'] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \tag{38}$$

e $D(L)=diag[(1-L)^d,(1-L)^{d-b}]$. O teste proposto tem como hipótese nula a ausência de cointegração e como hipótese alternativa a existência de cointegração fraccional. Para tal, torna-se necessário utilizar o modelo (34) de forma a obter as estimativas de d e d - b. Sowell (1992b) ao analisar a utilização dos critérios de informação de Akaike e de Schwartz na selecção de modelos ARFIMA, refere que pouco se conhece ainda acerca de tal escolha no âmbito dos modelos de memória longa. Para averiguar se a redução da ordem de integração resultante de uma relação de longo prazo é significativa, é utilizada a usual estatística t para b = 0.[18]

3.3.4.- Teste de cointegração fraccional sazonal

Para melhor compreender o conceito de cointegração fraccional sazonal considerem-se duas séries trimestrais y_t e x_t que são integradas de ordem 1 na frequência zero e nas frequências sazonais $p/2$ e p. Represente-se a integrabilidade de ordem um nas frequências 0, $p/2$ e p por I(*1*) com *1* = (1,1,1) e a integrabilidade de ordem zero nessas frequências por I(*0*) com *0* = (0,0,0). Da mesma forma, represente-se cointegração entre y_t e x_t de ordem CI(1,0) nas frequências 0, $p/2$ e p por CI(*1*,*0*) e CI(1,1) em todas as frequências por

[18] Dueker e Startz (1998) aplicam esta metodologia utilizando as taxas de juro de longo prazo dos EUA e do Canadá.

CI($1,1$). Se $m_t = a_1 y_t + a_2 x_t$ e existir um vector (a_1, a_2) comum a todas as frequências tal que m_t é I(0), então y_t e x_t são cointegradas de ordem CI($1,1$). Cointegração fraccional sazonal ocorre quando m_t é I(d), com $d = (d_0, d_1, d_2)$ e $0 < d_i < 1$ para algum i.

Seja $(a_1, a_2) = (1,-d)$ e $y_t = d x_t + u_t$ em que u_t é o termo do erro e

$$(1-L)^{d_0}(1+L)^{d_1}(1+L^2)^{d_2} u_t = e_t \tag{39}$$

onde d_0, d_1 e d_2 são parâmetros desconhecidos. Assuma-se que a ordem de cointegração correspondente às frequências 0, $p/2$ e p é, respectivamente, b_0, b_1 e b_2 representando por CI($1,b$) com $b = (b_0, b_1, b_2)$. Uma vez que, $d_i = 1 - b_i$, então em (39), se $d_0 = d_1 = d_2 = 0$ implica que y_t e x_t são cointegradas de ordem CI($1,1$) e se $d_0 = d_1 = d_2 = 1$ implica que são cointegradas de ordem CI($1,0$), isto é, não são cointegradas em nenhuma frequência. Estes dois casos têm sido os mais abordados na literatura, contudo a natural generalização da cointegração conduz à consideração do caso em que $0 < b < 1$. Para tais valores de b, y_t e x_t podem ser fraccionalmente cointegrados em alguma(s) das frequências. Assim, testar a ordem de cointegração CI($1,1$) contra a cointegração fraccional em alguma(s) das frequências consiste em testar H_0: $d = 0$ contra H_1: $d \geq 0$, e testar a ordem de cointegração CI($1,0$) contra a cointegração fraccional em alguma(s) das frequências consiste em testar H_0: $d = 1$ contra H_1: $d \leq 1$. Visto que ambos os testes são unilaterais, Silvapulle (1996) derivou a versão unilateral do teste T_0 através do procedimento desenvolvido por Silvapulle e Silvapulle (1995). Seja H_0: $d = 0$ e H_1: $d \geq 0$ então a estatística de teste vem dada por[19]

$$T_s^c = \left[U' i_{dd} U - \inf \left\{ (U-d)' i_{dd} (U-d) : d \geq 0 \right\} \right] \tag{40}$$

onde $U = n^{-1/2} i_{dd}^{-1} s_d$ e o *p-value* para rejeitar H_0 pode ser obtido através de

$$\Pr\left(T_s^c \geq c\right) = \sum_{i=1}^{3} w_i \Pr\left(c_{(i)}^2 \geq c\right) \tag{41}$$

[19] Silvapulle (1996) utiliza o teste T_s^c para testar a existência de cointegração fraccional sazonal entre o rendimento disponível e o consumo australiano.

com[20]

$$w_1 = \text{í}(1/4)p^{-1}\,[2p - \arccos(r_{12}) - \arccos(r_{13}) - \arccos(r_{23})]\text{ý} \tag{42}$$

$$w_2 = \text{í}(1/4)p^{-1}\,[3p - \arccos(r_{12.3}) - \arccos(r_{13.2}) - \arccos(r_{23.1})]\text{ý} \tag{43}$$

$$w_3 = (1/2 - w_2) \tag{44}$$

onde $(r_{12}\ ,\ r_{13}\ ,\ r_{23})$ e $(r_{12.3}\ ,\ r_{13.2}\ ,\ r_{23.1})$ são os coeficientes de autocorrelação e de autocorrelação parcial respectivamente, correspondentes à matriz de informação i_{dd}.

4.- Conclusão

Este artigo é uma exposição sintética dos conceitos de integração e cointegração fraccional. Foram descritos os respectivos testes e mostrou-se a relevância empírica deste tema.

Apesar do modelo ARFIMA ser superior, em relacão às abordagens convencionais, na representação de uma multiplicidade de processos, a sua generalização poderia possibilitar uma modelação ainda mais correcta do comportamento fraccional. De facto, partindo de um modelo mais geral, seria possível captar mais adequadamente a dinâmica do processo e obter melhores estimativas para os parâmetros relevantes. É neste contexto, que se manifesta a importância do modelo GARMA *(Gegenbauer Autoregressive Moving Average)* considerado por Gray *et al* (1989). O modelo GARMA *(p, u, l, q)*, com $l \neq 0$, é dado por

$$\Phi(L)(1 - 2xL + L^2)^l\,(y_t - m) = \Theta(L)e_t \tag{45}$$

que se reduz ao modelo ARFIMA se ξ = 1 e $l = d/2$. O processo GARMA é estacionário se |ξ| < 1 e $l < \frac{1}{4}$ e é invertível se |ξ| < 1 e $l > -\frac{1}{4}$. A função de autocorrelação, *r(j)*, de um processo GARMA para $0 < l < \frac{1}{2}$ e |ξ| < 1 é proporcional a $j^{2l-1}\,\mathrm{sen}(pl - jw_0)$ quando $j \to \infty$ e onde w_0 é frequência Gegenbauer. O modelo GARMA permite ter em consideração a componente periódica ou quasi-periódica na função autocorrelação. Enquanto que o modelo ARFIMA tem um pico no espectro em $f = 0$, o processo GARMA pode modelar o

[20] Estes pesos são dados por Wolak (1987).

comportamento periódico de longo prazo para qualquer frequência $0 \leq f \leq \frac{1}{2}$, daí que talvez se justificasse uma maior atenção a este tipo de processos no futuro.

5.- Referências

Agiakloglou, C., Newbold, P. (1994): “Lagrange multiplier tests for fractional difference”, Journal of Time Series Analysis, 15, 253-262.

Agiakloglou, C., Newbold, P. e Wohar, M. (1993): “Bias in a estimator of the fractional difference parameter”, Journal of Time Series Analysis, 14, 235-246.

Andersson, J. e Lyhagen, J. (1997): “A note on the power of the GPH test for cointegration”, Research Report 97:7, Department of Statistics, Uppsala University.

Andersson, M. K. e Gredenhoff, M. P. (1999): “On the maximum likelihood cointegration procedure under a fractional equilibrium error”, Economics Letters, 65, 143-147.

Andrews, D. (1991): “Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation”, Econometrica, 59, 817-858.

Ansley, C. F. e Newbold, P. (1979): “On the finite sample distribution of residual autocorrelations in autoregressive-moving average models”, Biometrika, 66, 547-553.

Baillie, R. T. (1996): “Long memory processes and fractional integration in econometrics”, Journal of Econometrics, 73, 5-59.

Baillie, R. T. e Bollerslev, T. (1994): “Cointegration, fractional cointegration, and exchange rate dynamics”, Journal of Finance, 49, 737-745.

Baillie, R. T. , Chung, C. F. e Tieslau, M. A. (1996): “Analysing inflation by the fractionally integrated ARFIMA-GARCH model”, Journal of Applied Econometrics, 11, 23-40.

Barkoulas, J. T., Baum, C. F. e Oguz, G. S. (1997): “Fractional dynamics in a system of long term international interest rates”, International Journal of Finance, 9:2, 586-606.

Barkoulas, J. T., Baum, C. F. e Oguz, G. S. (1998): “Stochastic long memory in traded goods prices”, Applied Economics Letters, 5, 135-138.

Baum, C. F., Barkoulas, J. T. e Caglayan, M. (1999): “Persistence in international inflation rates”, Southern Economic Journal, 65:4, 900-913.

Booth, G. G. e Tse, Y. (1995): “Long memory in interest rate futures markets: a fractional cointegration analysis”, Journal of Futures Markets, 15, 573-584.

Cheung, Y. W. (1993): “Tests for fractional integration: a Monte-Carlo Investigation”, Journal of Time Series Analysis, 14, 331-345.

Cheung, Y. W. e Lai, K. S. (1993): “A fractional cointegration analysis of purchasing power parity”, Journal of Business and Economic Statistics, 11, 103-112.

Cheung, Y. W. e Lai, K. S. (1995): “A search for long memory in international stock market returns”, Journal of International Money and Finance, 14, 597-615.

Chung, C. F. e Baillie, R. T. (1993): “Small sample bias in conditional sum of squares estimators of fractionally integrated ARMA models”, Empirical Economics, 18, 791-806.

Crato, N. e Rothman, P. (1994): “Fractional integration analysis of long-run behaviour for US macroeconomic time series”, Economics Letters, 45, 287-291.

Davies, N., Triggs, C. M. e Newbold, P. (1977): “Significance levels of the Box-Pierce portmanteau statistic in finite samples”, Biometrika, 64, 517-522.

DeGennaro, R., Kunkel, R. e Lee, J. (1994): “Modeling international long-term interest rates”, Financial Review, 29, 577-597.

Diebold, F. X., Gardeazabal, J. e Yilmaz, K. (1994): “On cointegration and exchange rate dynamics”, Journal of Finance, 49, 727-735.

Diebold, F. X. e Rudebusch, G. D. (1989): “Long memory and persistence in aggregate output”, Journal of Monetary Economics, 24, 189-209.

Diebold, F. X. e Rudebusch, G. D. (1991a): “Is consumption too smooth? Long memory and the Deaton paradox”, Review of Economics and Statistics, 71, 1-9.

Diebold, F. X. e Rudebusch, G. D. (1991b): “On the power of Dickey-Fuller tests against fractional alternatives”, Economics Letters, 35, 155-160.

Dueker, M. e Startz, R. (1998): “Maximum-likelihood estimation of fractional cointegration with an application to U.S. and canadian bond rates”, Review of Economics and Statistics, 80, 420-426.

Engle, R e Granger, C. W. J. (1987): “Cointegration e error correction: representation, estimation, and testing”, Econometrica, 55, 251-276.

Geweke, J. e S. Porter-Hudak (1983): “The estimation and application of long memory time series models”, Journal of Time Series Analysis, 4, 221-238.

Granger, C. W. J. (1980): “Long memory relationships and the aggregation of dynamic models”, Journal of Econometrics, 14, 227-238.

Granger, C. W. J. (1981): “Some properties of time series data and their use in econometric model specification”, Journal of Econometrics, 16, 121-130.

Granger, C. W. J. (1986): “Developments in the study of cointegrated economic variables”, Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 48, 213-228.

Granger, C. W. J. e Joyeux, R. (1980): “An introduction to long-memory time series models and fractional integration”, Journal of Time Series Analysis, 1, 15-29.

Gray, H. L., Zhang, N. F. e Woodward, W. A. (1989): “On generalized fractional processes”, Journal of Time Series Analysis, 10, 233-257.

Hassler, U. (1994): “(Mis)specification of long memory in seasonal time series”, Journal of Time Series Analysis, 15, 19-30.

Hassler, U. e Wolters, J. (1994): “On the power of unit roots against fractionally integrated alternatives”, Economics Letters, 45, 1-5.

Hassler, U. e Wolters, J. (1995): “Long memory in inflation rates: International evidence”, Journal of Business and Economic Statistics, 13, 37-45.

Hosking, J.R.M. (1981): “Fractional differencing”, Biometrika, 68, 165-176.

Hosking, J. R. M. (1984): "Modeling persistence in hydrological time series using fractional differencing", Water Resources Research, 20, 1898-1908.

Hurst, H. E. (1951): "Long term storage capacity of reservoirs", Transactions of the American Society of Civil Engineers, 116, 770-799.

Hurvich, C. M., Deo, R. e Brodsky, J. (1998): "The mean squared error of Geweke and Porter-Hudak`s estimator of the memory parameter of a long-memory time series", Journal of Time Series Analysis, 19, 19-46.

Hurvich, C. M. e Ray, B. K. (1995): "Estimation of the memory parameter for non-stationarity or non-invertible fractionally integrated processess", Journal of Time Series Analysis, 16, 17-41.

Hylleberg, S., Engle, R. F., Granger, C. W. J. e Yoo, B. S. (1990): "Seasonal integration and cointegration", Journal of Econometrics, 44, 215-238.

Johansen, S. (1988): "Statistical analysis of cointegration vectors", Journal of Economic Dynamics and Control, 12, 231-254.

Johansen, S. (1995): "Likelihood-based inference in cointegrated vector auto-regressive models", Oxford University Press, Oxford.

Lee, D. e Schmidt, P. (1996): "On the power of the KPSS test of stationarity against fractionally integrated alternatives", Journal of Econometrics, 73, 285-302.

Lien, D. e Tse, Y. K. (1999a): "Fractional cointegration and futures hedging", Journal of Futures Markets, 19, 457-474.

Lien, D. e Tse, Y. K. (1999b): "Forecasting the Nikkei spot index with fractional cointegration", Journal of Forecasting, 18, 259-273.

Lin, J. Y. (1991): "Generalized integrated process and the aggregation of dynamic time series", Academia Economic Papers, 19, 207-226.

Ljung, G. M. e Box, G. E. P. (1978): "On a measure of lack of fit in time series models", Biometrika, 65, 297-303.

Lo, A. W. (1991): “Long term memory in stock market prices”, Econometrica, 59, 1279-1313.

Lyhagen, J. (1998): “Maximun likelihood estimation of the multivariate fractional cointegrating model”, Working Paper Series in Economics and Finance, 233, Stockholm School of Economics.

Marques, Carlos Robalo (1998): “Modelos Dinâmicos Raízes Unitárias e Cointegração”, Edinova.

Masih, R. e Masih, A. M. M. (1996): “A fractional cointegration approach to empirical tests of PPP: new evidence and methodological implications from an application to the Taiwan/US dollar relationship”, Weltwirtschaftliches Archiv, 673-693.

Mcleod, A. I. (1978): “On the distribution and application of residual autocorrelations in Box-Jenkins models”, Journal of the Royal Statistical Society, B 40, 296-302.

McLeod, A. I. e Hipel, K. W. (1978): “Preservation of the rescaled adjusted range, part 1: A reassessment of the Hurst phenomenon”, Water Resources Research, 14, 491-508.

Mandelbrot, B. B. (1972): “Statistical methodology for non-periodic cycles: from the covariance to the R/S analysis”, Annals of Economic and Social Measurements, 1, 259-290.

Murteira, B. J. F., Muller, D. A. e Turkman, K. F. (1993): “Análise de sucessões cronológicas”, McGraw-Hill.

Porter-Hudak, S. (1990): “An application of the seasonal fractionally differenced model to the monetary aggregates”, Journal of the American Statistical Association, 410, 338-344.

Robinson, P. M. (1990): “Time series with strong dependence”, Advances in econometrics, 6th world congress, Cambridge University Press, Cambridge.

Robinson, P. M. (1991): “Log-periodogram regression of time series with long range dependence”, London School of Economics.

Schwartz, G. (1978): “Estimating the order of a model”, The Annals of Statistics, 2, 461-464.

Shea, G. S. (1991): “Uncertainty and implied variance bounds in long-memory models of the interest rate term structure”, Empirical Economics, 16, 287-312.

Silvapulle, M. e Silvapulle, P. (1995): “A score test against one-sided alternatives”, Journal of the American Statistical Association, 429, 1-8.

Silvapulle, P. (1996): “A score test for seasonal fractional integration and cointegration”, Discussion paper A96.01, School of Economics, La Trobe University.

Sowell, F. (1989): “Maximum likelihood estimation of fractionally integrated time series models”, manuscrito, Carnegie-Mellon University.

Sowell, F. (1992a): “Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series models”, Journal of Econometrics, 53, 165-188.

Sowell, F. (1992b): “Modeling long-run behaviour with the fractional ARIMA model”, Journal of Monetary Economics, 29, 277-302.

Stock, J. H. (1987): “Asymptotic properties of least squares estimators of cointegrating vectors”, Econometrica, 55, 1035-1056.

Tschernig, R., Zimmermann, K. F. (1992): “Illusive persistence in german unemployment”, Centre for Economic Policy Research, Discussion Paper nº 739.

Tse, Y. K., Anh, V. V. e Tieng, Q. (1998): “No-cointegration test based on fractional differencing: Some Monte Carlo results”, Journal of Statistical Planning and Inference, 80, 257-267.

Wolak, F. A. (1987): “An exact test for multiple inequality and equality constraints in the linear regression model”, Journal of the American Statistical Association, 82, 782-792.